การประเมินมูลค่าของ Callable Bond โดยใช้ Monte Carlo Simulation Techniques

Pricing Callable Bonds Based on Monte Carlo Simulation Techniques

พิมพ์ชนก แก้วชัยเจริญกิจ[1] และ สมพร ปั่นโภชา[2]

[1] สาขาวิศวกรรมการเงิน คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย, supunnee.suya@gmail.com

[2] สาขาวิศวกรรมการเงิน คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย, somporn_pun@utcc.ac.th

----

บทคัดย่อ

การศึกษาการประมาณมูลค่า Callable Bond โดยใช้เทคนิค Monte Carlo Simulation โดยใช้ข้อมูลอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย(Zero Coupon Yield Curve) ที่มีอายุ 1 เดือน โดยใช้เป็นข้อมูลแบบรายวันตั้งแต่วันที่ 2 มกราคม พ.ศ. 2556 จนถึง 31 มีนาคม พ.ศ. 2561 รวมทั้งสิ้น 1280 วัน ศึกษาเปรียบเทียบการหาอัตราดอกเบี้ยจากการศึกษา 2 วิธี คือ แบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross และแบบจำลอง Hull-White นำอัตราดอกเบี้ยมาทำการจำลองสถานการณ์โดยใช้เทคนิค Monte Carlo (Monte Carlo Simulation) จำนวน 10,000 ครั้ง เพื่อหามูลค่าของ Callable Bond จากการศึกษาพบว่า เมื่อพิจารณาที่วันหมดอายุเดียวกันของตราสารหนี้ มูลค่าของ Callable Bond ที่มาจากการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross และแบบจำลอง Hull-White มีความแตกต่างกัน โดยแบบจำลอง Hull-White ให้ผลการประมาณอัตราดอกเบี้ยที่เป็นไปตามแนวโน้มของเส้น Yield Curve ที่ควรจะเป็นมากกว่าแบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross ทั้งนี้เนื่องจากค่าพารามิเตอร์ของ Hull-White มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา

คำสำคัญ: Callable Bond, Monte Carlo Simulation, CIR Model, Hull-White Model, Embedded Option Pricing

ABSTRACT

This is a study of how to approximate callable bond's value by using Monte Carlo Simulation which uses the interest rate of zero coupon bond that has a maturity for 1 month period. We use daily data from the January 2013 to March 2018, totally 1,280 days. By comparing the results of 2 methods which are Cox-Ingersoll-Ross model and Hull-White model. The results show that callable bond from using Cox-Ingersoll-Ross model and Hull-White model are totally different. The Hull-White model give the approximate interest rate based on yield curve better than the Cox-Ingersoll-Ross model. The reason for the better results due to changeable parameter in the Hull-White model.

Keywords: Callable Bond, Monte Carlo Simulation, CIR Model, Hull-White Model, Embedded Option Pricing

1. บทนำ

Callable Bond เป็นตราสารหนี้ที่ให้สิทธิแก่ผู้ออกในการเรียกไถ่ถอนได้ก่อนครบกำหนดอายุ โดยจะมีการระบุเงื่อนไขที่ชัดเจนเกี่ยวกับช่วงเวลาที่ใช้สิทธิและราคาที่จะไถ่ถอน เช่นตราสารหนี้อายุ 10 ปีผู้ออกอาจกำหนดให้สามารถไถ่ถอนได้ก่อนกำหนด ณ สิ้นปีที่ 5 ที่ราคาพาร์ เป็นต้น เพราะฉะนั้น Callable Bond ก็คือ ตราสารหนี้ทั่วไปที่แฝงสิทธิในการไถ่ถอนคืนได้เพียงครั้งเดียวแบบ European Call Option หรือ ตราสารหนี้ทั่วไปที่แฝงสิทธิในการไถ่ถอนคืนได้หลายช่วงเวลาแบบ Bermudan Call Option แม้ว่าสิทธิในการไถ่ถอนคืนนี้จะเป็นส่วนหนึ่งของตราสารหนี้และไม่สามารถทำการซื้อขายสิทธิในการไถ่ถอนนี้ได้โดยเพียงอย่างเดียว ดังนั้นการหามูลค่าของ Callable Bond จะต้องนำปัญหาการหามูลค่าของสิทธิในการไถ่ถอนคืนเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย การประเมินมูลค่าตราสารอนุพันธ์ทางการเงินขึ้นอยู่กับสินค้าอ้างอิง ซึ่งสินค้าอ้างอิงของ Callable Bond ก็คืออัตราดอกเบี้ยนั่นเอง อัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเป็นตัวแปรทางการเงินที่สำคัญในทุกระบบเศรษฐกิจซึ่งธนาคารกลางใช้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเป็นเครื่องมือในการกำหนดนโยบายทางการเงิน

งานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะใช้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้นมาในการประเมินมูลค่าของตราสารหนี้แบบ Callable Bond ซึ่งการประมาณค่าอัตราดอกเบี้ยแบ่งออกได้เป็น 2 แบบคือ 1) แบบ Single Factor Models และ 2) แบบ Multiple Factor Models ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาการประมาณค่าอัตราดอกเบี้ยแบบ Single Factor Models เท่านั้น ซึ่งการประมาณค่าอัตราดอกเบี้ยแบบ Single Factor Model จะแบ่งออกได้เป็น 2 แบบคือ 1) แบบ Equilibrium Models และ 2) แบบ No-Arbitrage Models

1) แบบ Equilibrium Models เป็นวิธีการประมาณค่าอัตราดอกเบี้ยที่ไม่ได้ขึ้นกับเวลา เนื่องจากค่าพารามิเตอร์ที่อยู่ในสมการเป็นค่าคงที่ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ทำให้อัตราดอกเบี้ยที่ได้จากการประมาณด้วย Equilibrium Models นั้น มักไม่เป็นไปตามอัตราดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นจริงในตลาด วิธีการแบบ Equilibrium Models ที่นิยมใช้ได้แก่ Rendleman and Bartter model (1979) , Vasicek(1997) แต่การใช้วิธีการของ Vasicek อาจจะพบปัญหาได้สองอย่าง คือ อัตราดอกเบี้ย สามารถออกมาติดลบได้ และในแบบจำลอง Vasicek กำหนดให้ เป็นค่าคงที่ซึ่งในความเป็นจริง อัตราดอกเบี้ยจะมีการเพิ่มขึ้นตามเวลาหรือฟังก์ชั่นของ r(t) จากปัญหาข้างต้นมีการแก้ปัญหาโดย Cox, Ingersoll and Ross ในปี 1985 และเรียกแบบจำลองนี้ว่า CIR หรือ Cox,Ingersoll and Ross(1985) ในวิธีการแบบ CIR Model นี้ ทำการปรับให้พจน์ความผันผวน (σ) เพิ่มขึ้นตามฟังก์ชั่นของ r(t) ด้วยการเพิ่ม $\sqrt{r(t)}$ ในพจน์ค่าความผันผวนทำให้สมการสโตแคสติคดิฟเฟอเรนเชียส (SDE)

2) แบบ No-Arbitrage Models เป็นการประมาณอัตราดอกเบี้ยโดยการนำมูลค่าตราสารหนี้ที่เกิดขึ้นจริงในตลาดมาใช้ในการคำนวณหาอัตราดอกเบี้ยวิธีการแบบนี้จะเรียกว่า Yield Curve Fitting หรือ Calibration ค่าพารามิเตอร์จะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา (Independent of time) อัตราดอกเบี้ยที่ประมาณได้จากวิธีนี้จึงมีค่าใกล้เคียงกับอัตราดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นจริง วิธีการแบบ No-Arbitrage Models แบ่งออกเป็น 3 รูปแบบคือ Ho Lee (1986), Hull-White (one-factor) (1990) และ Black-Karasinski(1991)

การคำนวณมูลค่าของ Callable Bond มีหลายวิธีที่แตกต่างกัน วิธีการแรกเป็นวิธีการของ Black-Derman-Toy model (2006) ด้วยการจำลองสถานการณ์แบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete simulation) ของโครงสร้างข้อมูลแบบต้นไม้ และประเมินมูลค่าแบบ Risk-Neutral วิธีการที่สองมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDE) ที่มีเงื่อนไขค่าขอบ (boundary condition เป็นอัตราดอกเบี้ยที่ได้จากการประมาณค่าแบบ Equilibrium Model แต่การแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDE) นั้นมีความยุ่งยาก จึงมีการเสนอวิธีการหาค่าประมาณของผลเฉลยของสมการ PDE โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัว

เลขที่แตกต่างออกไปเพื่อช่วยในการแก้ปัญหา เช่น Butter and Wald –Vogel (1996) หรือ D'Halluim (2001)หรือ JiangXue (2011) เป็นต้น

ในงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยนำวิธีการแบบ Monte Carlo Simulation Technique มาใช้ในการประเมินมูลค่า Callable Bond ที่แฝงสิทธิในการไถ่ถอนคืนได้เฉพาะในวันที่กำหนดก่อนหรือภายในวันสิ้นสิทธิ (A call of Bermudan option) ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด และใช้ CIR Interest rate Model กับ Hull-White Model ในการประมาณอัตราดอกเบี้ย ซึ่งวิธีการของ Monte Carlo จะถูกนำมาทำการจำลองแบบเสมือน (simulation) เพื่อวัดผลที่สนใจ โดยทำการจำลองเป็นจำนวนมากๆครั้ง เพื่อให้มีจำนวนเพียงพอที่จะค่าที่ได้จากการสุ่มเหล่านั้นมาหาความน่าจะเป็น (probability) ของค่าที่ต้องการทราบ

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

2.1 เพื่อศึกษาการประเมินมูลค่าของ Bermudan Callable Bond

2.2 เพื่อประมาณมูลค่า Callable Bond ที่แฝงสิทธิในการไถ่ถอนคืนได้เฉพาะในวันที่กำหนดก่อนหรือภายในวันสิ้นสิทธิ (A call of Bermudan option)

2.3 เพื่อเปรียบเทียบมูลค่า Callable Bond ที่ได้จากการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบ CIR กับ มูลค่า Callable Bond ที่ได้จากการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง Hull-White

3. การดำเนินการวิจัย

ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยจะประเมินมูลค่า Callable bond จากการประมาณอัตราดอกเบี้ยโดยพิจารณา 2 วิธี ได้แก่แบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross และแบบจำลอง Hull-White ซึ่งมีรายละเอียดและขั้นตอนการศึกษาดังต่อไปนี้

3.1 ข้อมูลที่ใช้ในการศึกษา

อัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย(Zero Coupon Yield Curve) ทุกวันหมดอายุ โดยใช้เป็นข้อมูลแบบรายวัน ตั้งแต่วันที่ 2 มกราคม พ.ศ. 2556 จนถึง 31 มีนาคม พ.ศ. 2561 ซึ่งในการประมาณอัตราดอกเบี้ยทั้งสองวิธีจะใช้อัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ที่ไม่จ่ายดอกเบี้ยที่มีอายุ 1 เดือน

3.2 ขั้นตอนการวิจัย

3.2.1 การประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross

1) นำข้อมูล zero yield curve ในวันสุดท้ายที่ทำการเก็บข้อมูลมาใช้สร้างตารางตราสารหนี้ที่มีวันหมดอายุในทุกๆเดือน จนครบจำนวนเดือนของอายุตราสารที่เยอะที่สุด (30×12) นั่นคือ 360 เดือน และทำการคำนวณหาอัตราดอกเบี้ยกับ spread

2) หาค่าพารามิเตอร์จากข้อมูลจริงโดยในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยจะประมาณดอกเบี้ยกับตราสารหนี้ที่มีอายุ 1 เดือนด้วยสูตรการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง CIR ดังสมการต่อไปนี้

$$dr = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW \qquad (3.1)$$

โดยที่ κ คือ ความเร็วในการลู่กลับเข้าสู่ค่าเฉลี่ยในระยะยาว

θ คือ ค่าเฉลี่ยในระยะยาว

$r(t)$ คือ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (Short Rate)

σ คือ ค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

dW คือ กระบวนการสโตแคสติคมาตรฐาน หรือเรียกว่ากระบวนการวีนเนอร์ (Wiener Process) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น $\sqrt{dt}$

3) ในสูตรการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง CIR จะต้องทราบค่า จึงทำการสุ่มค่า ε □ $(0,1)$ ขึ้นมาคูณกับ $\sqrt{\Delta t}$ โดยที่ Δt มีค่า 1/360

4) แทนค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากข้อ 2) และ 3) ลงในสมการการประมาณอัตราดอกเบี้ยของแบบจำลอง CIR จะได้ค่า Δr_t^* เมื่อนำค่า Δr_t^* บวกกับอัตราดอกเบี้ยวันก่อนหน้า จะได้อัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ที่มีอายุ 1 เดือนในแต่ละวัน (t)

3.2.2 การประมาณอัตราดอกเบี้ยโดยแบบจำลอง Hull-White

การประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง Hull-White ดังสมการต่อไปนี้

$$dr = \kappa\left(\frac{\theta(t)}{\kappa} - r\right)dt + \sigma(t)dW \tag{3.2}$$

โดยที่ κ คือ ความเร็วในการลู่กลับเข้าสู่ค่าเฉลี่ยในระยะยาว

θ คือ ค่าเฉลี่ยในระยะยาว

r คือ คือ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (Short Rate)

σ คือ ค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

dW คือ กระบวนการสโตแคสติคมาตรฐาน หรือเรียกว่ากระบวนการวีนเนอร์ (Wiener Process)ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น $\sqrt{dt}$

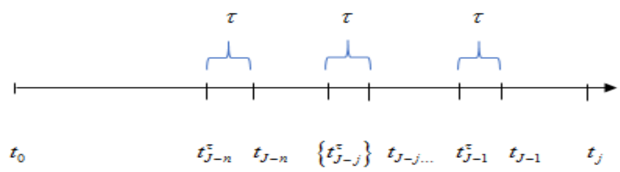
จะประมาณตามวิธีคิดแบบ Hull-White Trinomial Tree การคำนวณแบบ Trinomial Tree จะแบ่งการคำนวณออกเป็น 3 ส่วนคือ 1.) การคำนวณหาอัตราดอกเบี้ย (R^*) 2.) การคำนวณหาความน่าจะเป็นของ Trinomial Tree (p_u, p_m, p_d) 3.)การคำนวณหาค่าที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ($\theta(t)$)

3.2.3 การประเมินมูลค่า Callable bond

ขั้นตอนการประเมินมูลค่า Callable Bond โดยใช้อัตราดอกเบี้ยมาที่มาจากประมาณด้วยแบบจำลอง CIR

1) คำนวณหามูลค่าตราสารหนี้ไม่มีสิทธิการไถ่ถอนแฝง (Straight Bond Price)

2) คำนวณหาอัตราดอกเบี้ยที่จุดคุ้มทุน ณ วันที่ t_{J-1}^{τ} กำหนดให้วันที่มีการแจ้งการใช้สิทธิการไถ่ถอนล่วงหน้า (Notice Date) แทนด้วย τ แต่เพื่อความสะดวกในการคำนวณจะกำหนดให้วันที่มีการแจ้งการใช้สิทธิการไถ่ถอนล่วงหน้าแทนด้วย $t_{J-j}^{\tau} = t_{J-j} - \tau$ เป็นไปตามรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ช่วงเวลาที่สามารถเลือกใช้สิทธิได้ในแต่ละวันที่กำหนดตามเงื่อนไข

3) นำอัตราดอกเบี้ยจุดคุ้มทุนที่หาได้จากข้อ 2) มาเทียบกับอัตราดอกเบี้ย ณ วันที่ t_{J-1}^{τ} ของทุกๆเส้นอัตราดอกเบี้ยที่จำลองสถานการณ์ขึ้นด้วยแบบจำลอง CIR เพื่อหาค่าความน่าจะเป็นของการใช้สิทธิไถ่ถอนและความน่าจะเป็นของการไม่ใช้สิทธิไถ่ถอน

4) คำนวณหาค่าคาดหวังของมูลค่า Callable Bond ณ วันที่ t_{J-1}^{τ} โดยใช้สูตร

$$E(K_1)=\frac{\sum_{j=1}^{n=10,000} K_{1_{call,j}}}{n}\times prob(K_{1_{call}})+\frac{\sum_{j=1}^{n=10,000} K_{1_{uncall,j}}}{n}\times prob(K_{1_{uncall}}) \qquad (3.3)$$

โดยที่ $\frac{\sum_{j=1}^{n=10,000} K_{1_{call,j}}}{n}$ คือค่าเฉลี่ยของราคาใช้สิทธิสำหรับกรณีที่ใช้สิทธิไถ่ถอน

$\frac{\sum_{j=1}^{n=10,000} K_{1_{uncall,j}}}{n}$ คือค่าเฉลี่ยของราคาใช้สิทธิสำหรับกรณีที่ไม่ใช้สิทธิไถ่ถอน

$prob(K_{1_{call}})$ คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่ผู้ออกใช้สิทธิไถ่ถอน

$prob(K_{1_{uncall}})$ คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่ผู้ออกไม่ใช้สิทธิไถ่ถอน

5) คำนวณหาอัตราดอกเบี้ยที่จุดคุ้มทุน ณ วันที่ t_{J-2}^{τ} จะคำนวณด้วยวิธีเดียวกับข้อ 2) โดยจะหาอัตราดอกเบี้ยจุดคุ้มทุนจากสมการ

6) นำอัตราดอกเบี้ยจุดคุ้มทุนที่หาได้จากข้อ 5) มาเปรียบเทียบเพื่อหาค่าความน่าจะเป็น และนำไปหาค่าคาดหวังของมูลค่าของ Callable Bond ณ ตำแหน่งที่ $j-2$ แทนด้วย K_2 ด้วยวิธีการเช่นเดียวกับข้อ 4)

7) ทำซ้ำด้วยวิธีตามข้อ 2) ถึงข้อ 4) เพื่อหาค่าคาดหวังของมูลค่า $K_3, K_4, \ldots, K_5$

8) นำมูลค่าของตราสารหนี้ ณ ที่สิ้นปีที่ 5 (K_5) มาหามูลค่าของ callable bond ในปัจจุบัน ด้วยการนำ K_5 มาใช้ ดังนั้นการหามูลค่าปัจจุบันจากปีที่ 5 มายังปีที่ 4

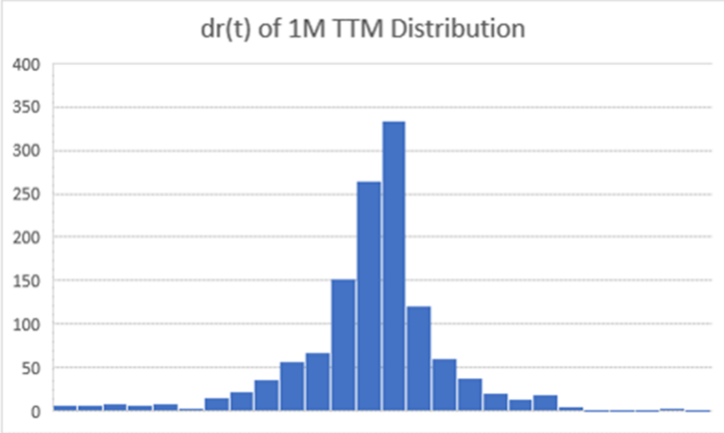
9) ประเมินมูลค่า Callable bond ด้วยอัตราดอกเบี้ยที่ประมาณจากวิธีการของแบบจำลอง Hull-White ด้วยการทำข้อ 1) ถึง ข้อ 8) ซ้ำ

10) เปรียบเทียบมูลค่า Callable bond ที่มาจากการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง CIR กับแบบจำลอง Hull-White

4. ผลการวิจัย

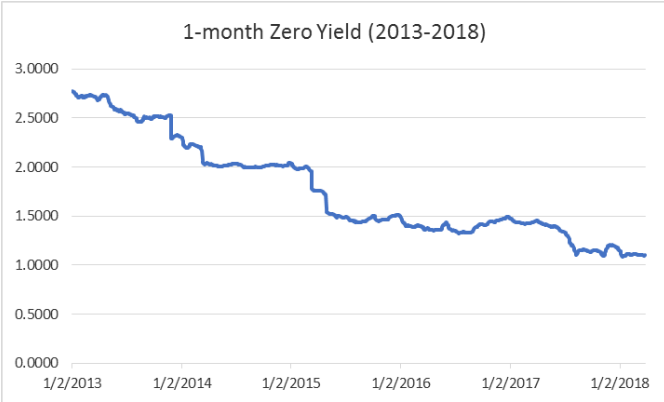
4.1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น

จากการเก็บข้อมูลอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ที่ไม่จ่ายดอกเบี้ย(Zero Coupon Yield Curve) ทุกวันหมดอายุ โดยใช้เป็นข้อมูลแบบรายวัน ตั้งแต่วันที่ 2 มกราคม พ.ศ. 2556 จนถึง 31 มีนาคม พ.ศ. 2561 เพื่อใช้ในการประมาณอัตราดอกเบี้ยทั้งสองวิธีจะใช้อัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ที่ไม่จ่ายดอกเบี้ยที่มีอายุ 1 เดือน เมื่อนำมาวิเคราะห์ค่าเบื้องต้นทางสถิติพบว่า อัตราดอกเบี้ยแบบรายวันของตราสารหนี้ที่มีอายุ 1 เดือนมีค่าความโด่ง (Kurtosis) เป็น 3.9636 และมีค่าความเบ้ (Skewness) เป็น -0.4799 ซึ่งเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับการกระจายตัวแบบปกติ (Normal Distribution) สามารถแสดงเป็นภาพการกระจายแบบฮีทโทแกรมได้ดังรูปที่ 4.1



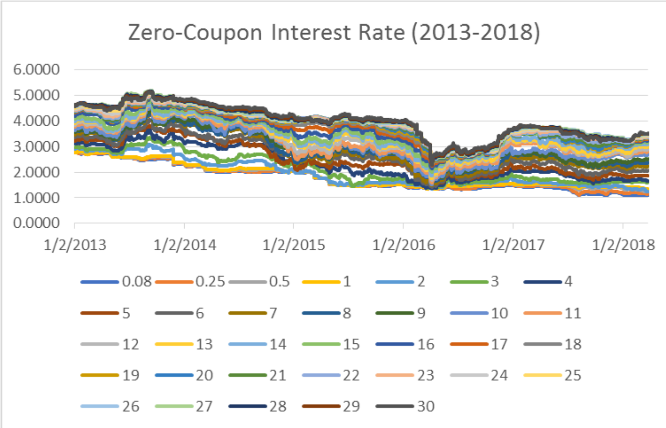
รูปที่ 4.1 Histogram การกระจายของอัตราดอกเบี้ยรายวันของตราสารหนี้ที่มีอายุ 1 เดือน

จากการเก็บข้อมูลพบว่าอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ที่มีอายุ 1 เดือน ตั้งแต่ปี 2 มกราคม พ.ศ. 2556 จนถึง 31 มีนาคม พ.ศ. 2561 มีค่าลดลงมาเรื่อยๆ แสดงดังรูปที่ 4.2 และหากนำอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ทุกๆอายุ ตั้งแต่ปี 2 มกราคม พ.ศ. 2556 จนถึง 31 มีนาคม พ.ศ. 2561 มาวาดกราฟจะเห็นว่าภาพรวมของอัตราดอกเบี้ยจากอดีตจนถึงปัจจุบันนั้นลดลงมาเรื่อยๆเช่นกัน นั่นแสดงว่าการจ่ายดอกเบี้ยของตราสารหนี้ทุกอายุมีการจ่ายดอกเบี้ยที่ลดลง



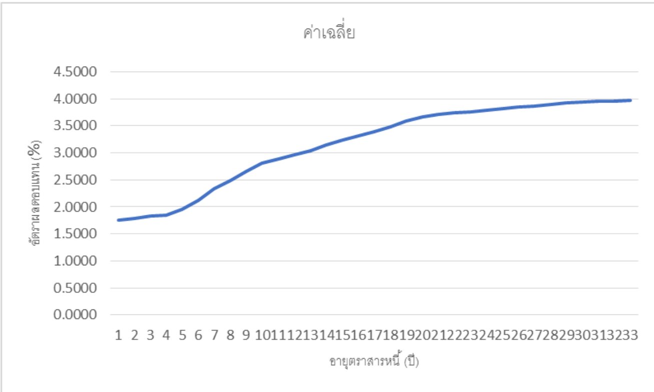
รูปที่ 4.2 อัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้อายุ 1 เดือนตั้งแต่ปี 2 มกราคม พ.ศ. 2556 จนถึง 31 มีนาคม พ.ศ. 2561

และหากนำอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ทุกๆอายุ ตั้งแต่ปี 2 มกราคม พ.ศ. 2556 จนถึง 31 มีนาคม พ.ศ. 2561 มาวาดเป็นกราฟจะเห็นว่าภาพรวมของอัตราดอกเบี้ยจากอดีตจนถึงปัจจุบันนั้นลดลงมาเรื่อยๆเช่นกัน นั่นแสดงว่าการจ่ายอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ทุกอายุมีการจ่ายดอกเบี้ยที่ลดลง ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 อัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ทุกๆอายุ ตั้งแต่ปี 2 มกราคม พ.ศ. 2556 จนถึง 31 มีนาคม พ.ศ. 2561

เมื่อนำข้อมูลมาหาค่าเฉลี่ยของอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้แต่ละอายุ พบว่าถ้าตราสารหนี้ที่มีอายุยาวมากขึ้นจะมีอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยที่สูงขึ้นด้วย ดังรูปที่ 4.4

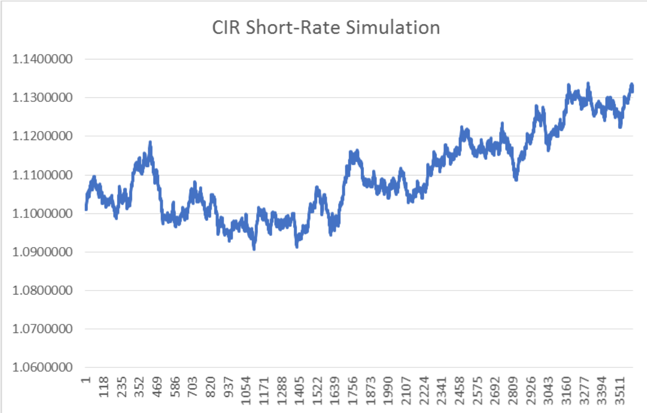


รูปที่ 4.4 กราฟค่าเฉลี่ยของอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ในทุกอายุตั้งแต่วันที่ 2 มกราคม พ.ศ. 2556 จนถึง 31 มีนาคม พ.ศ. 2561

4.2 การประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง CIR

จากการนำข้อมูลอัตราดอกเบี้ยย้อนหลังมาใช้เพื่อคำนวณหาค่าพารามิเตอร์การประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง CIR ได้ค่าพารามิเตอร์ดังนี้ $k = 0.0031364, \theta = 0.0175627, \sigma = 0.0106346$ และกำหนดให้ $r_0 = 1.1010890\%$ และ $\Delta t = 1/360$

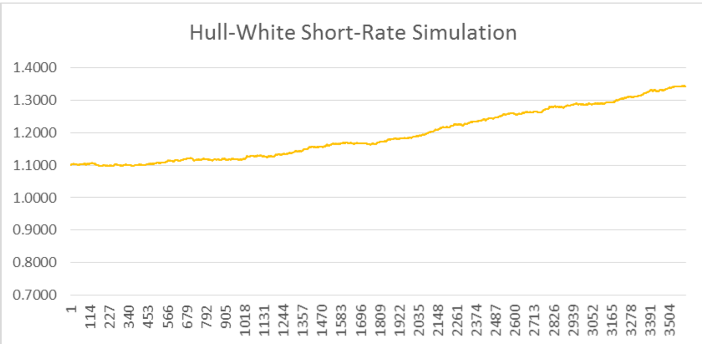
เมื่อนำค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดใส่ลงในสมการการประมาณอัตราดอกเบี้ยแบบจำลอง CIR แล้วทำการจำลองสถานการณ์อัตราดอกเบี้ยขึ้นมาเป็นระยะเวลา 10 ปีจำนวน 1 เส้น ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 การจำลองสถานการณ์อัตราดอกเบี้ยระยะสั้นของตราสารหนี้อายุ 1 เดือนด้วยแบบจำลอง CIR เป็นเวลา 10 ปี

4.3 การประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง Hull-White

เมื่อกำหนดค่าพารามิเตอร์โดยให้ $k(t)=0.003136, \sigma(t)=0.0106346$ และ $\Delta t = 1/360$ และเมื่อนำข้อมูลที่รวบรวมมาคำนวณรวมกับกับข้อมูล zero coupon bond ที่อายุต่างๆในตลาดเพื่อคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ $\theta(t)$ จากนั้นนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้ทั้งหมดไปแทนตามสมการที่ (3.2) สมการประมาณอัตราดอกเบี้ยของแบบจำลอง Hull-White แล้วทำการจำลองสถานการณ์ (simulate) ของอัตราดอกเบี้ยขึ้นมาเป็นระยะเวลา 10 ปีจำนวน 1 เส้น ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 การจำลองสถานการณ์อัตราดอกเบี้ยระยะสั้นของตราสารหนี้อายุ 1 เดือนด้วยแบบจำลอง Hull-White เป็นเวลา 10 ปี

4.4 การประมาณมูลค่า Callable Bond

4.4.1 อัตราดอกเบี้ยจุดคุ้มทุนของแบบจำลอง CIR กับแบบจำลอง Hull-White

ตารางที่ 4.1 แสดงอัตราดอกเบี้ยจุดคุ้มทุนของแบบจำลอง CIR และแบบจำลอง Hull-White

N=10000	Break even interest rate (%)	
Call date	CIR	Hull-White
$1^{st}\,\tilde{t}_{J-5}$	4.463521	0.281777
$2^{nd}\,\tilde{t}_{J-4}$	4.463694	0.713548
$3^{rd}\,\tilde{t}_{J-2}$	4.463705	1.382139
$4^{th}\,\tilde{t}_{J-2}$	3.887583	2.223326
$5^{th}\,\tilde{t}_{J-1}$	1.980274	1.980274

จากตารางที่ 4.1 จะพบว่าค่าอัตราดอกเบี้ยจุดคุ้มทุนที่คำนวณได้ในแต่ละวันที่มีการแจ้งการใช้สิทธิก่อนจะแตกต่างกันออกไป เป็นค่าของอัตราดอกเบี้ยที่ผู้ออกตราสารหนี้ใช้ในการตัดสินใจว่าจะไถ่ถอนตราสารหนี้คืนหรือไม่ เมื่อเทียบกับอัตราดอกเบี้ยในตลาด หากอัตราดอกเบี้ยในตลาด ของวันที่มีการแจ้งการใช้สิทธิก่อนมีค่าน้อยกว่าอัตราดอกเบี้ยที่จุดคุ้มทุน ผู้ออกจะไม่ใช้สิทธิในการไถ่ถอนตราสารหนี้

4.4.2 เปรียบเทียบมูลค่า Callable Bond ที่ได้จากการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง CIR กับมูลค่า Callable Bond ที่ได้จากการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง Hull-White

ผลการประเมินมูลค่า Callable Bond ที่ได้จากการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง CIR กับแบบจำลอง Hull-White โดยการจำลองสถานการณ์เส้นอัตราดอกเบี้ยจำนวน 10,000 ครั้ง จะแสดงดังในตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 เปรียบเทียบมูลค่า Callable bond จากการประมาณอัตราดอกเบี้ยของแบบจำลอง CIR และ Hull-White

N=10000	CIR model	Hull-White model
Straight Bond Price	1.083775	0.982504
Callable Bond Price	1.064884	1.010178
Call Option Value	-0.018891	0.027674

จากตารางที่ 4.2 จะพบว่าเมื่อคำนวณหามูลค่าตราสารหนี้ไม่มีสิทธิการไถ่ถอนแฝง (Straight Bond price) ของการประมาณอัตราดอกเบี้ยของแบบจำลอง CIR มีค่าสูงกว่าตราสารหนี้ที่แฝงสิทธิในการไถ่ถอนคืน (Callable Bond Price) และแบบจำลอง Hull-White มูลค่าตราสารหนี้ไม่มีสิทธิการไถ่ถอนแฝงที่คำนวณได้นั้นมีค่าน้อยกว่าตราสารหนี้ที่แฝงสิทธิไถ่ถอนคืน เป็นเพราะสิทธิในการไถ่ถอนคืนนี้จะเป็นส่วนหนึ่งของตราสารหนี้ ราคาของ Callable bond จึงราคาสูงกว่าตราสารหนี้ปกติเพราะเพิ่มมูลค่าของ Call option เข้าไปด้วย และจะไม่สามารถทำการซื้อขายสิทธิในการไถ่ถอนนี้ได้โดยเพียงอย่างเดียว

5. บทสรุปและข้อเสนอแนะ

ผลจากการประเมินมูลค่าของ Callable bond โดย Monte Carlo Simulation ด้วยวิธีการจำนวน 10,000 ครั้ง การประมาณอัตราดอกเบี้ยของแบบจำลอง CIR พบว่ามูลค่าของ Callable bond มีค่าเท่ากับ 1.064884 บาท มูลค่าของตราสารหนี้ที่ไม่มีสิทธิไถ่ถอน มีค่าเท่ากับ 1.083775 บาท และมูลค่าของสิทธิที่แฝงอยู่ในตราสารหนี้จึงมีค่าเท่ากับ -0.018891 บาท ในทำนองเดียวกันมูลค่าของ Callable bond ด้วยวิธีการของแบบจำลอง Hull-White มีค่าเท่ากับ 1.010178 บาท มูลค่าของตราสารหนี้ที่ไม่มีสิทธิไถ่ถอน มีค่าเท่ากับ 0.982504 บาท และมูลค่าของสิทธิที่แฝงอยู่ในตราสารหนี้จึงมีค่าเท่ากับ 0.027674 บาท

หากพิจารณาในด้านของการประมาณอัตราดอกเบี้ย ตั้งแต่การประมาณอัตราดอกเบี้ยจุดคุ้มทุน และการประมาณเส้นอัตราดอกเบี้ยขึ้นมา จะพบว่าอัตราดอกเบี้ยจุดคุ้มทุน ณ วันที่มีการแจ้งการใช้สิทธิการไถ่ถอนล่วงหน้าต่างๆ ระหว่างการประมาณอัตราดอกเบี้ยของแบบจำลอง CIR กับแบบจำลอง Hull-White มีค่าที่แตกต่างกัน เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่งเดียวกัน นั่นเป็นเพราะ การจำลองสถานการณ์อัตราดอกเบี้ยของแบบจำลอง CIR กราฟของอัตราดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นจะวิ่งขึ้นลงอยู่ในช่วงแคบๆของเส้นไปเรื่อยๆ เพราะค่าพารามิเตอร์ที่นำมาใช้ในการประมาณด้วยแบบจำลอง CIR เป็นค่าคงที่ ทำให้อัตราดอกเบี้ยที่ได้มาอยู่ในกรอบเท่าเดิมตลอดช่วงเวลา แต่ในทางกลับกันการจำลอง

สถานการณ์ของ Hull-White เป็นการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยการใช้ข้อมูลในตลาดมาใช้ ทำให้ค่าพารามิเตอร์ของ Hull-White มีการเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาซึ่งไม่คงที่ ส่งผลให้การประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยวิธีนี้เป็นไปตามแนวโน้มของเส้น Yield Curve ด้วยเหตุผลนี้เองทำให้อัตราดอกเบี้ยที่ออกมาระหว่าง CIR กับ Hull-White ไม่ไปในทิศทางเดียวกันและส่งผลให้การประเมินมูลค่า Callable bond จากการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วย CIR กับ Hull-White แตกต่างกันและจากตารางที่ 4.2 แสดงว่าการประมาณมูลค่า callable bond จากการประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง Hull-White จึงเป็นวิธีที่ดีกว่าซึ่งสอดคล้องในทางทฤษฎีนั่นคือ มูลค่าตราสารหนี้ที่แฝงสิทธิไถ่ถอนคืนจะมีมูลค่าที่มากกว่าตราสารหนี้ไม่มีสิทธิการไถ่ถอนแฝง แต่จากการประมาณมูลค่าตราสารหนี้โดยใช้การประมาณอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง CIR มีผลการประมาณมูลค่าตราสารหนี้ไม่มีสิทธิการไถ่ถอนแฝงสูงกว่ามูลค่าตราสารหนี้ที่แฝงสิทธิไถ่ถอนคืนซึ่งไม่เป็นไปตามทฤษฎีที่ควรจะเป็น

ดังนั้นในการประมาณมูลค่าของ Callable Bond หรือตราสารหนี้อื่นๆ ที่ต้องมีการประมาณอัตราดอกเบี้ยมาใช้ในการประเมินมูลค่า ควรเลือกใช้แบบจำลองการประมาณอัตราดอกเบี้ยที่สอดคล้องกับอัตราดอกเบี้ยในตลาดหรือเป็นไปตามการคาดการณ์ของตลาด เช่น แบบจำลอง Hull-White หรือแบบจำลอง BGM (The Brac, Gatarek, and Musiela Model-Multifactor) เป็นต้น จะทำให้ผลลัพธ์แม่นยำและใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากกว่า

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาค้นคว้าอิสระเรื่องนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพร ปั่นโภชา ที่ให้คำปรึกษาแนะนำในการศึกษาค้นคว้าอิสระ การตรวจทานเนื้อหาการค้นคว้า และ ให้แนะนำในการแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้น ในระหว่างการศึกษาค้นคว้า จนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ขอขอบพระคุณสมาคมตลาดตราสารหนี้ไทย ที่ได้ให้ข้อมูลอัตราดอกเบี้ยย้อนหลังเพื่อใช้ในการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองครั้งนี้ รวมถึงคณาจารย์ผู้สอนทุกท่านที่ได้ประสาทวิชาความรู้ตลอดหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมการเงิน มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

เอกสารอ้างอิง

C. Kahl and H. Schurz. “Balanced Milstein Methods for Ordinary SDEs,” *Monte Carlo Methods and Applications*, doi:10.1515/156939606777488842

D. Ding and C. I. Chao. (2009). “An Efficient Numerical Scheme for Simulation of Mean-Reverting Square-Root Diffusions,” *Journal of Numerical Mathematics and Stochastics*, Vol. 1, pp. 45-55.

G. N. Milstein, E. Platen and H. Schurz. (1998). “Balanced Implicit Methods for Stiff Stochastic Systems,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 35, No. 3, 1010-1019. doi:10.1137/S0036142994273525

H. Ben-Ameur, M. Breton, L. Karoui and P. L’Ecuyer. (2007) “A Dynamic Programmimg Approach for Pricing Options Embedded in Bonds,” *Journal of Economics Dynamic and Control*, Vol. 31, No. 7, 2212-2233.

H.J. Buttler. (1995). “Evaluation of callable Bonds: Finite Difference Methods,Stability and Accuracy,” *The Economics Journal*, Vol. 105, No. 429, 374-384.

H.J. Buttler and J. Waldvogel, (1996). “Pricing Callable Bonds by Means of Green’s Function,” *Mathematical Finance*, Vol. 6, No. 1, 53-88.

J. C. Cox, J. E. Ingersoll and S. A. Ross. (1985). "A Theory of the Term-Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, 385-408. doi:10.2307/1911242

J. Farto and C. V'azquez. (2005) "Numerical Techniques for Pricing Callable Bonds with Notice," *Applied Mathematics and Computation*, Vol 161, No. 3, 989-1013. doi:10.1016/j.amc.2003.12.079.

O. Vasicek. (1977) "An Equilibrium Characteriaztion of the Term Structure," *Journal of Financial Economices*, Vol. 5, No.2, 177-188. doi:10.1016/0304-405X(77)90016-2

P. Glasserman, Monte Carlo. (2004). Methods in Financial Engineering, 2nd Edition, Springer, New York, 2004.

Y. D'Hallium, P. A. Forsyth, K. R. Vetzal and G. Labahn. (2001). "A Numerical PDE Approach for Pricing Callable Bonds," *Applied Mathematical Finance*, Vol. 8, No. 1, 49-77. doi:10.1080/13504860110046885

Z. L. Zheng and C. F. Kang. (2006). *Pricing and Hedging of Chinese Interest Rate Derivertives*, Peking University Press, Beijing.