การประเมินราคาออปชันด้วยแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR

The Evaluation of Pricing Option with Stochastic Alpha Beta Rho Model

นภสร สิริวนาสรรค์[1] และ สมพร ปั่นโภชา[2]

[1] สาขาวิศวกรรมการเงิน คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย,

19305312010101@live4.utcc.ac.th

[2] คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย, sompon_punpocha@yahoo.com

----

บทคัดย่อ

การศึกษาครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแบบจำลองที่จะสามารถทำให้การประเมินราคายูโรเปียนออปชันมีความแม่นยำที่มากขึ้น เนื่องจากการประเมินราคายูโรเปียนออปชันจากพารามิเตอร์ของแบบจำลองของแบล็ค เพียงอย่างเดียวมีข้อจำกัดที่ค่อนข้างเยอะ ซึ่งอาจจะไม่ตรงตามสภาวะตลาดที่แท้จริง การปรับค่าพารามิเตอร์ให้ตรงกับสภาวการณ์ในตลาดตามแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR นั้นจะสามารถช่วยแก้ไขในเรื่องข้อจำกัดของแบบจำลองของแบล็คได้

ซึ่งงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาการประเมินราคายูโรเปียนคอลออปชันภายใต้แบบจำลองความผันผวนสโต-แคสติก SABR Model ในด้านคณิตศาสตร์การเงินแบบจำลอง SABR Model คือแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติกอันหนึ่ง ที่สามารถใช้เพื่อจับภาพเส้นความโค้งของค่าความผันผวน (Volatility Smile) ในตลาดของตราสารอนุพันธ์ โดยแบบจำลอง SABR มีชื่อเต็มว่า Stochastic Alpha, Beta, Rho Model ซึ่งมาจากชื่อของพารามิเตอร์ที่ต้องใช้ในแบบจำลองนี้ SABR Model นั้นได้ถูกใช้กันอย่างแพร่หลายในอุตสาหกรรมด้านการเงิน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในตลาดของตราสารอนุพันธ์ทางด้านดอกเบี้ย ซึ่งแบบจำลองนี้ได้ถูกพัฒนาขึ้นโดย Patrick S. Hagan, Deep Kumar, Andrew Lesniewski, และ Diana Woodward

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้เลือกใช้ข้อมูลของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ประเภทคอล ของดัชนี SET50 ชื่อ S5019C2106A ซึ่งเริ่มเปิดทำการซื้อขายตั้งแต่วันที่ 6 มกราคม พ.ศ.2564 มีราคาใช้สิทธิ (Strike Price) ที่ 1,150 จุด โดยมีดัชนีตัวคูณเท่ากับ 0.02778 บาท:จุด และมีวันครบกำหนดอายุ (Maturity Date) วันที่ 2 กรกฎาคม พ.ศ.2564

ในการประมาณราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A นี้ผู้วิจัยได้เริ่มจากการปรับค่าพารามิเตอร์ β, α, ρ, ν ให้ตรงตามสภาวการณ์ของตลาดที่เกิดขึ้นจริง ซึ่ง β คือค่าพารามิเตอร์สำหรับเทอมของค่าผลตอบแทนของสินทรัพย์อ้างอิง และเป็นค่าที่ควบคุมค่าความโค้ง (Curvature) ของพื้นผิวของค่าความผันผวน-เชิงนัย (Implied Volatility Surface) , α คือ ค่าพารามิเตอร์สำหรับเทอมของค่าความผันผวน (Volatility) และเป็นค่าที่ควบคุมระดับความสูงของความผันผวนเชิงนัย (Implied Volatility) ที่อยู่ในช่วง At-the-money (ATM) , ρ คือ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation) แบบ Instantaneous ระหว่างราคาของสินทรัพย์อ้างอิง กับค่าความผันผวนของราคาสินทรัพย์อ้างอิง และเป็นค่าที่ควบคุมความชันของค่าความเบ้เชิงนัย (Implied Skew) และ ν คือค่าความผันผวน ของความผันผวนที่เกิดจากราคาสินทรัพย์อ้างอิง (Volatility of Volatility) เป็นค่าที่บอกถึงค่าความโค้ง (Curvature) ของเส้นโค้งความผันผวนเชิงนัย (Implied Volatility Curve)

โดยในที่นี้จะกำหนดให้ค่า $\beta = \frac{1}{2}$ เนื่องจาก การกำหนดให้ค่า $\beta = \frac{1}{2}$ นั้นจะนำไปสู่การหาผลเฉลยแบบปิด (Close Form) ของแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR Model ได้ จากนั้นนำค่าพารามิเตอร์ α, ρ, ν ไปคำนวณหาค่าความผันผวนเชิงนัยตามแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR Model จาก 2 วิธี ซึ่งได้แก่

วิธีที่1 คือ การคำนวณหาค่าความผันผวนเชิงนัยจากการปรับค่าพารามิเตอร์ α, ρ, ν โดยตรงด้วยวิธี Optimization เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่จะทำให้ค่าความคาดเคลื่อนยกกำลังสอง (Error Square) ระหว่างค่าความผันผวนที่ได้จากตลาด (Market Volatility) และค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากแบบจำลอง SABR มีค่าต่ำที่สุด และนำไปหาค่าประมาณราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์S5019C2106A ต่อไป

วิธีที่ 2 คือ การใช้ค่าพารามิเตอร์ α เชิงนัย (Implying Alpha) ที่ได้มาจากค่าความผันผวนเชิงนัย ณ ช่วง At-the-money ไปคำนวณหาค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากการปรับค่าพารามิเตอร์ ρ และ ν ด้วยวิธีการทาง Optimization เช่นเดียวกับวิธีที่ 1 และนำค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้ไปหาค่าประมาณราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์S5019C2106A ต่อไป

จากนั้นจึงนำค่าประมาณราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์S5019C2106A ที่ได้มาจาก 2 วิธีดังกล่าว มาเทียบกับค่าประมาณราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A ที่ได้จากการนำค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้มาจากการแทนค่าราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A ที่สังเกตได้จริงจากตลาดย้อนกลับในแบบจำลองของแบล็ค โดยไม่มีการปรับค่าพารามิเตอร์ใดๆ

จากการศึกษาพบว่า การใช้ค่าความผันผวนเชิงนัยตามแบบจำลอง SABR ด้วยการปรับค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีที่ 2 คือ ปรับค่า ρ และ ν โดยการใช้ค่าพารามิเตอร์ α เชิงนัย (Implying Alpha) ที่ได้มาจากค่าความผันผวนเชิงนัย ณ ช่วง At-the-money จะทำให้ได้ค่าประมาณของราคา S5019C2106A ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด คือ มีค่า RMSE = 0.3590 เมื่อเทียบกับ การใช้ค่าความผันผวนเชิงนัยตามแบบจำลอง SABR ด้วยการปรับพารามิเตอร์ด้วยวิธีที่ 1 คือ ปรับค่า α, ρ และ ν โดยตรง ซึ่งได้ค่า RMSE = 0.3631 และ การใช้ค่าความผันผวนเชิงนัยตามสมมติฐานของแบบจำลองของแบล็ค ซึ่งได้ค่า RMSE = 0.3917 โดยค่า RMSE ในที่นี้คือ ค่าความคาดเคลื่อน Root Mean Square Error ที่ได้มาจากการเทียบราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์S5019C2106A ย้อนหลังที่สังเกตได้จริงจากในตลาดกับราคาใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์S5019C2106A ที่ได้มาจากค่าความผันผวนเชิงนัยทั้ง 3 วิธี

คำสำคัญ: การประเมินราคาออปชัน, แบบจำลองความผัวผวนสโตแคสติก SABR, ค่าความผันผวนเชิงนัย

ABSTRACT

The purpose of this study was to investigate a model that could provide a more accurate valuation of European options prices. This is because the valuation of European options from the parameters of the Black's model alone is quite limited, which may not correspond to the actual market conditions. Adjusting the parameters to match the market conditions according to the SABR stochastic volatility model can help to overcome the limitations of the black model.

This research is to study the valuation of European call options under the Stochastic Volatility SABR Model. In financial mathematics, the SABR Model is a stochastic volatility model that can be used to capture the volatility smile curve in the derivatives market. The SABR model's full name is Stochastic Alpha, Beta, Rho Model, which is derived from the name of the parameters required in this model. The SABR Model is widely used in the financial industry, especially in the interest derivatives market. The model was developed by Patrick S. Hagan, Deep Kumar, Andrew Lesniewski, and Diana Woodward.

In this research, the researcher selected the data of the call derivative warrants of the SET50 index named S5019C2106A, which started trading on 6 January 2021, with a strike price of 1,150 point. It has a multiplier index of 0.02778 baht per points and has a maturity date on July 2, 2021.

To estimate the price of Derivative Warrant S5019C2106A, the researcher started by fitting the parameters β, α, ρ, ν to market data. Where β is the CEV component for forward rate (determines shape of forward rates, leverage effect and backbone of ATM volatility). α is instantaneous volatility and is the value that controls the height of implied volatility in the At-the-money (ATM) . ρ is the correlation between the Brownian motions driving the forward rate and the instantaneous volatility. ν is the volatility of volatility.

Here, the value $\beta = \frac{1}{2}$ will be set because $\beta = \frac{1}{2}$ will lead to the closed form finding of the SABR stochastic volatility model. The parameters α, ρ, ν were then calculated for the implied volatility according to the SABR stochastic volatility model from two methods:

Method 1 is to calculate implied volatility from direct optimization of parameters α, ρ, ν by Optimization method to determine parameters that will square error between market volatility and the implied volatility obtained from the SABR model was the lowest.

Method 2 is to use the Implying Alpha obtained from the At-the-money implied volatility to calculate the implied volatility obtained to fitting parameters ρ and ν by using the same optimization method as Method 1.

Then, the price estimates of derivative warrants S5019C2106A obtained from these two methods are compared with the estimated price of derivative warrants S5019C2106A obtained by taking the implied volatility value obtained from the price representation of derivative warrant S5019C2106A actually observed from reverse market in black model without any parameter adjustment.

The study found that using the implied volatility in the SABR model with the second method of parameter adjustment, ρ and ν were adjusted using the implying alpha parameter obtained from the at-the-money volatility will give an estimate of the price of S5019C2106A that is closest to the reality is RMSE = 0.3590. Compared with the SABR model implied volatility that calibrate parameter by method 1 that was directly calibrate for α, ρ and ν, which RMSE = 0.3631, and using the model hypothesis implied volatility of Black's model which has a value of RMSE = 0.3917. The RMSE value here is the Root Mean Square Error derived from comparing the historically observable price of derivative warrant S5019C2106A in the market with approximate price of S5019C2106A that derived from all three methods of implied volatility.

Keywords: Pricing Option, SABR model, Implied Volatility

1. บทนำ

ยูโรเปียนออปชัน (European options) มักจะถูกกำหนดราคา และมีการป้องกันความเสี่ยงโดยการใช้แบบจำลองของแบล็ค (Black's model) ซึ่งในแบบจำลองของแบล็ค ราคาของยูโรเปียนออปชัน (European options) และ ค่าความผันผวน (Volatility) จะมีความสัมพันธ์กันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นจึงสามารถประเมินราคาออปชันได้จากค่าความผันผวนเชิงนัย (Implied Volatility) โดยค่าความผันผวนเชิงนัยนี้คือมูลค่าของความผันผวนที่ได้มาจากการนำราคาออปชันในตลาดมาคำนวณย้อนกลับในสมการของแบล็ค ซึ่งตามทฤษฎีแล้วค่าความผันผวน (Volatility) ในแบบจำลองของแบล็ค จะต้องเป็นค่าคงที่ แต่ในทางปฏิบัติออปชันที่มีราคาใช้สิทธิ์ (Strike Price) ที่แตกต่างกันควรมีค่าความผันผวน (Volatility) ที่ต่างกันเพื่อทำให้ราคาออปชันที่คำนวณได้มีมูลค่าตรงกับราคาตลาด (Market Price) ซึ่งเมื่อนำค่าความผันผวนเชิงนัยของออปชันมาพล็อตกราฟ จะมีส่วนที่เป็นความโค้งและความเบ้ (Smiles and Skews) ในปรับค่าความโค้งและความเบ้ (Smiles and Skews) ของค่าความผันผวนให้ตรงกับสภาวการ์ของตลาดนั้นจะมีความสำคัญต่อหน่วยงานที่มีหน้าที่กำกับดูแลด้านตราสารอนุพันธ์และ ด้านอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ เนื่องจากหน่วยงานเหล่านี้มักจะมีความเสี่ยงจากราคาใช้สิทธิ์ (Strike Price) ของออปชันแต่โดยทั่วไปแล้วการใช้ค่าความผันผวน (Volatility) ที่แตกต่างกันในการประเมินราคาออปชันจากแบบจำลองของแบล็ค ถือเป็นเรื่องที่ยาก

ดังนั้นจึงได้มีการพัฒนาแบบจำลองเพื่อลดข้อด้อยของการประเมินราคาออปชันด้วยแบบจำลองของแบล็ค โดย Dupire และ Derman-Kani ได้พัฒนาแบบจำลอง Local Volatility ซึ่งถือเป็นความก้าวหน้าครั้งสำคัญในการจัดการกับค่าความโค้งและความเบ้ ของค่าความผันผวนเชิงนัยของตลาด ซึ่งแบบจำลอง Local Volatility มีคุณสมบัติ คือ เป็นแบบจำลองที่มีความสอดคล้องในตัวเอง (Self-Consistent) ไม่มีโอกาสในการเก็งกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (Arbitrage-free) และสามารถปรับเทียบให้ตรงกับค่าความโค้งและความเบ้ (Smiles and Skews) ของตลาดที่สังเกตมาได้อย่างแม่นยำ ซึ่งในปัจจุบันแบบจำลองนี้ได้ถูกใช้เป็นแบบจำลองพื้นฐานในการพัฒนาและปรับปรุงแก้ไขแบบจำลองใหม่ๆให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น เพื่อทำให้ราคาของสินทรัพย์อ้างอิงและราคาของออปชันที่คำนวณได้จากค่าความผันผวนเชิงนัย เคลื่อนไหวไปในทิศทางเดียวกัน หนึ่งในนั้นก็คือ แบบจำลอง SABR ที่ถูกพัฒนามาจากแบบจำลอง Local Volatility โดยแบบจำลอง SABR จะถูกใช้ในการหาค่า Stochastic Volatility ซึ่งเป็นค่าที่ได้มาจากการที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงและความผันผวนมีความสัมพันธ์ที่ขึ้นต่อกัน โดยจะสามารถเขียนกระบวนการของราคา

ของสินทรัพย์อ้างอิง ซึ่งในที่นี้จะใช้เป็นราคาฟอร์เวิร์ด (Forward Price; f) ของสินทรัพย์อ้างอิง และกระบวนการของค่าความผันผวนเชิงนัยภายใต้แบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR Model ได้เป็น
แบบจำลองนี้จะได้ Forward Price และ ค่าความผัวผวน (Volatility) คือ

$$d\hat{F}(t) = \hat{\alpha}(t)\hat{F}^{\beta}dW_1\,, \qquad \hat{F}(0) = f$$

$$d\hat{\alpha}(t) = \nu\hat{\alpha}(t)dW_2\,, \qquad \hat{\alpha}(0) = \alpha$$

โดยที่ W_1 และ W_2 คือสองกระบวนการ Weiner Process โดยมีสัมประสิทธ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient) อยู่ในช่วง $-1 \leq \rho \leq 1$ ภายใต้ Forward Measure จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ (Correlate) ของทั้งสองกระบวนการนี้ได้เป็น :

$$dW_1 dW_2 = \rho dt$$

สำหรับค่าของ β, ν ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่เป็นค่าคงที่ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข $0 \leq \beta \leq 1$ และ $\nu \geq 0$ เมื่อ

$\hat{F}(t)$ คือราคาของสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบไม่มาตรฐาน (Forward Price) บนสินทรัพย์อ้างอิง A ณ วันครบกำหนดชำระ(Settlement Date) t_{set}

$\hat{\alpha}(t)$ คือค่าความผันผวน(Volatility) ณ ที่เวลา t_{set} ใดๆ

โดยจะพบว่าเราสามารถใช้แบบจำลอง SABR Model ในการสร้างเส้นโค้งของค่าความผันผวนโดยนัย (Implied Volatility Curves) ได้ โดยเส้นโค้งที่ได้นั้นจะเป็นเส้นที่เหมือนกับเส้นโค้งของค่าความผันผวนโดยนัยที่สังเกตได้ในตลาดจริงสำหรับวันครบกำหนดอายุ t_{ex} ใดๆพอดี ที่สำคัญกว่านั้นเราสามารถใช้แบบจำลอง SABR - Model สำหรับคาดการณ์พฤติกรรมที่ถูกต้องของเส้นโค้งความผันผวนโดยนัยได้ ทำให้แบบจำลอง SABR Model เป็นแบบจำลองที่มีประสิทธิภาพในการจัดการกับความโค้งของค่าความเสี่ยง (Smile Risk) ในตลาดของตราสารอนุพันธ์ที่มีวันครบกำหนดอายุเพียงวันเดียว ซึ่งตลาดเหล่านี้รวมถึงตลาดตราสารอนุพันธ์ประเภท Swaption และตราสารอนุพันธ์ประเภท Caplet/Floorlet ด้วย

เราจะใช้เทคนิค Singular Perturbation ในการประเมินราคาของยูโรเปียนออปชันด้วยแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR Model ซึ่งราคานี้เป็นที่ได้มาจากการแทนค่าความผันผวนเชิงนัยของออปชัน $\sigma_B(K,f)$ ลงในแบบจำลองของแบล็ค (Black's Model) ซึ่งก็คือ

$$V_{call} = D(t_{set})\{fN(d_1) - KN(d_2)\},$$

$$V_{put} = V_{call} + D(t_{set})[K - f]$$

โดยที่

$$d_{1,2} = \frac{log f/K \pm \frac{1}{2}\sigma_B^2 t_{ex}}{\sigma_B\sqrt{t_{ex}}}$$

เมื่อสามารถกำหนดค่าความผันผวนเชิงนัยได้เป็น

$$\sigma_B(K,f) = \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}\left\{1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2 f/K + \frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4 f/K + \cdots\right\}} \cdot \left(\frac{z}{x(z)}\right)$$
$$\cdot \left\{1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right] t_{ex} + \cdots\right\}$$

เมื่อ

$$z = \frac{\nu}{\alpha}(fK)^{(1-\beta)/2}\log f/K$$

และนิยาม $x(z)$ ได้เป็น

$$x(z) = \log\left\{\frac{\sqrt{1-2\rho z+z^2}+z-\rho}{1-\rho}\right\}$$

สำหรับในกรณีที่ออปชันอยู่ในช่วง at-the-money หรือ $K = f$ จะได้ค่าความผันผวนเชิงนัยเป็น

$$\sigma_{ATM} = \sigma_B(f,f) = \frac{\alpha}{f^{1-\beta}}\left\{1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{f^{2-2\beta}} + \frac{1}{4}\frac{\rho\beta\alpha\nu}{f^{(1-\beta)}} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right] t_{ex} + \cdots\right\}$$

เมื่อ

V_{call} คือ มูลค่าของคอลออปชัน (Call Option)

V_{put} คือ มูลค่าของพุทออปชัน (Put Option)

f คือ ราคาของสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบไม่มาตรฐาน (Forward Price) ของสินทรัพย์อ้างอิง ณ ปัจจุบัน

t_{ex} คือ วันครบกำหนดอายุของออปชัน (Exercise Date)

$D(t_{set})$ คือ Discount Factor ณ วันครบกำหนดชำระ t_{set}

α คือ ค่าพารามิเตอร์สำหรับเทอมของค่าความผันผวน (Volatility) และเป็นค่าที่ควบคุมระดับความสูงของความผันผวนเชิงนัย (Implied Volatility) ที่อยู่ในช่วง At-the-money (ATM)

ρ คือ Instantaneous Correlation ระหว่างราคาของสินทรัพย์อ้างอิง และค่าความผันผวนของราคาสินทรัพย์อ้างอิง และเป็นค่าที่ควบคุมความชันของ Implied Skew

β คือค่าพารามิเตอร์สำหรับเทอมของค่าผลตอบแทนของสินทรัพย์อ้างอิง และเป็นค่าที่ควบคุมค่าความโค้ง (Curvature) ของ Implied Volatility Surface (Patrick S. Hagan, 2002)

จากเหตุผลข้างต้นผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาการประเมินราคายูโรเปียนคอลออปชันภายใต้แบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR (Stochastic Alpha Beta Rho Model) โดยใช้ข้อมูลรายวันของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A ตั้งแต่วันที่ 6 มกราคม พ.ศ.2564 ถึงวันที่ 11 มิถุนายน พ.ศ.2564 ของตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย ด้วยการใช้ค่าพารามิเตอร์ที่ได้มีการปรับค่า (Calibrate) ให้เป็นไปตามสภาวการณ์ที่เกิดขึ้นจริงในตลาด ซึ่งค่าค่าพารามิเตอร์ใหม่ที่ได้จะถูกนำไปคำนวณหาค่าความผันผวนเชิงนัยตามแบบจำลอง SABR ซึ่งจะทำให้สามารถประมาณราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A ได้แม่นยำมากยิ่งขึ้น

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อศึกษาแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR Model
2. เพื่อเปรียบเทียบราคาออปชันที่ได้จากแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR Model กับราคาที่ได้ จากผลเฉลยของแบบจำลองแบล็ค

3. การดำเนินการวิจัย

3.1 ศึกษาที่มาและความสำคัญของแบบจำลอง SABR Model

3.2 เก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการศึกษาราคาใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ (Derivative Warrant) ของดัชนี SET50 ประเภท Call ชื่อ S5019C2106A ซึ่งเริ่มเปิดทำการซื้อขายตั้งแต่วันที่ 6 มกราคม พ.ศ.2564 จนถึง วันที่ 29 มิถุนายน พ.ศ. 2564 มีราคาใช้สิทธิ (Strike Price) ที่ 1,150 จุด โดยมีดัชนีตัวคูณเท่ากับ 0.02778 บาท:จุด และมีวัน

ครบกำหนดอายุ (Maturity Date) วันที่ 2 กรกฎาคม พ.ศ.2564 ซึ่งเป็นหลักทรัพย์ที่ออกโดย บริษัทหลักทรัพย์หยวนต้า (ประเทศไทย) จำกัด ด้วยการรวบรวมข้อมูลทุติยภูมิ โดยทำการเก็บรวบรวมข้อมูลจากตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย https://www.set.or.th/site/products/dw/historical-trading?lang=th&symbol=S5019C2106A ตั้งแต่วันที่ 6 มกราคม พ.ศ.2564 ถึง 11 มิถุนายน พ.ศ.2564 เนื่องจากเป็นใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ ที่มีปริมาณการซื้อขายที่มากที่สุดเมื่อเทียบกับ ใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ประเภทคอล ของดัชนีSET50 อื่นๆที่มีการซื้อขายกันในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

3. ทำการปรับค่าพารามิเตอร์จากแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR Model ให้ตรงกับสภาวการณ์ของตลาด เพื่อทำการหาค่าความผันผวนเชิงนัย (Implied Volatility) จากสมการดังต่อไปนี้

$$\sigma_B(K,f) = \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}\left\{1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2 f/K+\frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4 f/K+\cdots\right\}} \cdot \left(\frac{z}{x(z)}\right) \cdot$$
$$\left\{1+\left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right]t_{ex}+\cdots\right\}$$

โดยเริ่มจากการปรับค่าพารามิเตอร์ β ให้ตรงกับสภาวการณ์ของตลาดจากข้อมูลย้อนหลังที่สังเกตได้จริง หรือเลือกจากค่าเบื้องต้นของ β ก็ได้ เราจะได้ค่าความผันผวนเชิงนัย (Implied Volatility) ของออปชัน ณ ช่วง At-the-money เป็น

$$\log\sigma_B(f,f) = \log\alpha - (1-\beta)\log f + \log\left\{1+\left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{f^{2-2\beta}}+\frac{\frac{1}{4}(\rho\beta\alpha\nu)}{f^{(1-\beta)}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right]t_{ex}+\cdots\right\}$$

จะเห็นได้ว่าค่าพารามิเตอร์ β จะสามารถดึงออกมาจากค่า log ของข้อมูลย้อนหลังของราคาฟอร์เวิร์ด ณ ปัจจุบัน (f) และค่า log ของค่าความผันผวนเชิงนัยของออปชัน ณ ช่วง At-the-money(σ_{ATM}) ได้ เนื่องจากทั้งราคาฟอร์เวิร์ด (f) และ α เป็นตัวแปรสุ่มสโตแคสติกทั้งคู่ ขั้นตอนการปรับค่า β ด้วยวิธีใช้ข้อมูลย้อนหลังที่สังเกตจริงจึงค่อนข้างยุ่งยาก และในเทอม $[\ldots]t_{ex}$ โดยทั่วไปแล้วมักจะมีค่าน้อยกว่า 1% หรือ 2% การปรับค่าพารามิเตอร์ β ให้ตรงกับสภาวการณ์ตลาดที่แท้จริงจึงไม่เป็นที่นิยมเท่าใดนัก

การกำหนดค่าพารามิเตอร์ β อีกวิธีหนึ่งคือการเลือกค่า β จากค่าเบื้องต้น ซึ่งจะเป็นการกำหนดค่าของ β ด้วยความเชื่อที่เกี่ยวกับการแจกแจง (Distribution) ของราคาฟอร์เวิร์ดของสินทรัพย์อ้างอิง f ณ ปัจจุบันของเรา โดยมักจะกำหนดให้ค่า $\beta = 0$ (Stochastic Normal) , $\beta = \frac{1}{2}$ (Stochastic CIR Model) และ $\beta = 1$ (Stochastic Lognormal) เราจะเลือกใช้ค่า

$\beta = 0$ เมื่อเราเชื่อว่า ราคาฟอร์เวิร์ด f จะมีการแจกแจงเป็นแบบ Stochastic Normal Model หรือ Stochastic Gaussian Model โดยที่อัตราดอกเบี้ยในตลาด ณ ขณะนั้นมีค่าติดลบ (Negative) ยกตัวอย่างเช่นการนำไปใช้กับตลาดที่มีการซื้อขายที่เกี่ยวข้องกับ อัตราดอกเบี้ยเงินเยน (Yen Interest Rate) กล่าวคือ เราจะแทนค่า $\beta = 0$ เมื่อราคาฟอร์เวิร์ด f มีค่าติดลบ (Negative) หรือมีค่าเข้าใกล้ 0

$\beta = \frac{1}{2}$ เมื่อเราเชื่อว่า ราคาฟอร์เวิร์ด f จะมีการแจกแจงเป็นแบบ Stochastic CIR Model (Stochastic Cox-Ingersoll-Ross Model) กล่าวคือ เราจะแทนค่า $\beta = \frac{1}{2}$ เมื่อเราเชื่อว่าอัตราดอกเบี้ย ณ ขณะนั้นมีโอกาสที่จะติดลบน้อย ยกตัวอย่างเช่นการนำไปใช้ในตลาดที่มีการซื้อขาย อัตราดอกเบี้ย US ดอลลาร์

$\beta = 1$ เมื่อเราเชื่อว่า ราคาฟอร์เวิร์ด f จะมีการแจกแจงเป็นแบบ Stochastic Lognomal Model ซึ่งเป็นที่นิยมในการนำไปใช้ในตลาดที่มีการซื้อขาย อัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างแระเทศ

โดยปกติแล้วการปรับค่าพารามิเตอร์ α, β, ρ, ν ภายใต้ SABR Model จะสามารถปรับได้บ่อยตามที่ต้องการ แต่การปรับค่านั้นจะต้องเป็นการปรับค่าเท่าที่จำเป็นเท่านั้น โดยอาจจะปรับค่าพารามิเตอร์ให้ตรงกับสภาวการณ์ของตลาดเพียงเดือนละครั้ง หรือสองเดือนครั้งก็เพียงพอแล้ว

จากนั้นจึงนำค่าพารามิเตอร์ β ที่เลือก โดยในที่นี้ผู้วิจัยจะเลือกใช้ค่าพารามิเตอร์ $\beta = \frac{1}{2}$ เนื่องจากการเลือกค่า $\beta = \frac{1}{2}$ นี้จะนำไปสู่การหาผลเฉลยแบบปิดในการหาค่าความผันผวนเชิงนัยภายใต้แบบจำลอง SABR Model ได้ จากนั้นจึงนำค่า β ไปปรับค่าพาริมิเตอร์ที่ให้เข้ากับข้อมูลที่เกิดขึ้นจริงในตลาดภายใต้แบบจำลอง SABR จาก 2 วิธี ดังต่อไปนี้

<u>วิธีที่ *1*</u> Calibrate Alpha, Rho และ Nu โดยตรง

คือ การคำนวณหาค่าความผันผวนเชิงนัยจากการปรับค่าพารามิเตอร์ α, ρ, ν โดยตรงด้วยวิธี Optimization เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่จะทำให้ค่าความคาดเคลื่อนยกกำลังสอง (Error Square) ระหว่างค่าความผันผวนที่ได้จากตลาด (Market Volatility) และค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากแบบจำลอง SABR ที่มีค่าต่ำที่สุด

<u>วิธีที่ 2</u> ปรับค่า Rho และ Nu โดยการใช้ค่า Implying Alpha จาก ค่าความผันผวน (Volatility) ณ At-the Money

การทำการปรับค่า ด้วยวิธีนี้จะทำให้ได้ค่าความผันผวน ณ At-the-Money มีค่าเท่ากับที่มีการใช้ (Quote) กันในตลาดพอดี ซึ่งวิธีการนี้เป็นก็วิธีการที่ใช้กันอย่างแพร่หลายโดยเราสามารถกำหนดค่า ค่าพารามิเตอร์ α เชิงนัย (Implying Alpha) จาก ค่าความผันผวน ณ At-the-Money ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{(1-\beta)^2 T}{24F^{2-2\beta}}\alpha^3 + \frac{\rho\beta\nu T}{4F^{1-\beta}}\alpha^2 + \left(1 + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2 T\right)\alpha - \sigma_{ATM}F^{1-\beta} = 0$$

เมื่อ F คือ มูลค่าฟอร์เวิร์ด ณ ปัจจุบัน (Current Forward Value)

T คือ อายุคงเหลือก่อนถึงวันครบกำหนดอายุ (ปี)

σ_{ATM} คือ ค่าความผันผวน (Volatility) ณ ช่วง At-the-Money

α เป็นค่าที่ควบคุมระดับความสูง (Height) ของเส้นโค้งความผันผวนเชิงนัย (Implied Volatility Curve)

ρ เป็นค่าที่ควบคุมความเบ้ (Skew) ของเส้นโค้งความผันผวนเชิงนัย (Implied Volatility Curve)

ν เป็นค่าที่บอกถึงค่าความโค้ง (Curvature) ของเส้นโค้งความผันผวนเชิงนัย (Implied Volatility Curve)

ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้โปรแกรม Matlab ในการทำการ Optimization เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆจากวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 และใช้โปรแกรม Matlab ในการหาค่าความผันผวนเชิงนัยภายใต้แบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR Model จากค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากทั้ง 2 วิธี

จากนั้นนำค่าความผันผวนเชิงนัย ที่ได้จากทั้ง 2 วิธี ภายใต้แบบจำลอง SABR และค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากการแทนราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A แทนค่าลงในแบบจำลองแบล็ค เพื่อประมาณราคาของ S5019C2106A ย้อนหลัง สามารถเขียนแบบจำลองของแบล็คได้เป็น

$$V_{call} = D(t_{set})\{fN(d_1) - KN(d_2)\},$$

$$V_{put} = V_{call} + D(t_{set})[K - f]$$

โดยที่

$$d_{1,2} = \frac{\log f/K \pm \frac{1}{2}\sigma_B^2 t_{ex}}{\sigma_B\sqrt{t_{ex}}}$$

3.3 นำราคา S5019C2106A ที่ได้จากการประมาณด้วยค่าความผันผวนเชิงนัยแต่ละวิธี มาเปรียบเทียบความแม่นยำกัน โดยวัดค่าความแม่นยำจากค่า RMSE ที่มีค่าต่ำที่สุด โดยค่า RMSE ในที่นี้คือ ค่าความคาดเคลื่อน Root Mean Square Error ที่ได้มาจากการเทียบราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์S5019C2106A ย้อนหลังที่สังเกตได้จริงจากในตลาดกับราคาประมาณของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์S5019C2106A ที่ได้มาจากค่าความผันผวนเชิงนัยทั้ง 3 วิธี ซึ่งสามารถหาค่า RMSE ได้จาก

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Error)^2}$$

โดยที่

$$Error = Actual\ Data - Predicted\ Data$$

4. ผลการวิจัย

ผลการประเมินมูลค่ายูโรเปียนคอลออปชันด้วยแบบจำลอง SABR จากชุดข้อมูลใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ S5019C2106A ราคาในตลาดของใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ และดัชนี SET50 ณ วันที่ 11 มิถุนายน พ.ศ. 2564 เมื่อ F=*989.9* S = *990.78* ,K = *1,150* , T = *0.286* , r = *2.735%* และ โดยมีดัชนีตัวคูณเท่ากับ 0.02778 บาท:จุด มีดังนี้

4.1 การปรับค่าพารามิเตอร์จาก SABR Model

ค่าพารามิเตอร์ใหม่ที่ถูกปรับแล้วจากแต่ละวิธีแสดงค่าในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR

	Alpha	Beta	Rho	Nu	SABRImpVol
Method 1	12.062	0.5	0.034725	0.74842	0.3739
Method 2	12.081	0.5	-3.99E-09	0.5	0.37274

ที่มา : จากการคำนวณโดยการใช้โปรแกรม Matlab

เมื่อได้ค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองสำหรับวันที่ต้องการศึกษาการประเมินมูลค่าคอลออปชันแล้วจากตารางที่ 4.1 นำค่าที่ได้ไปคำนวณหาราคาของยูโรเปียนคอลออปชันจากการนำค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR ไปแทนค่าย้อนกลับในแบบจำลองของแบล็ค ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้คำนวณหาราคาของยูโรเปียนคอลออปชันจากการใช้โปรแกรม Matlab

4.2 มูลค่าของยูโรเปียนคอลออปชันจาก SABR Model

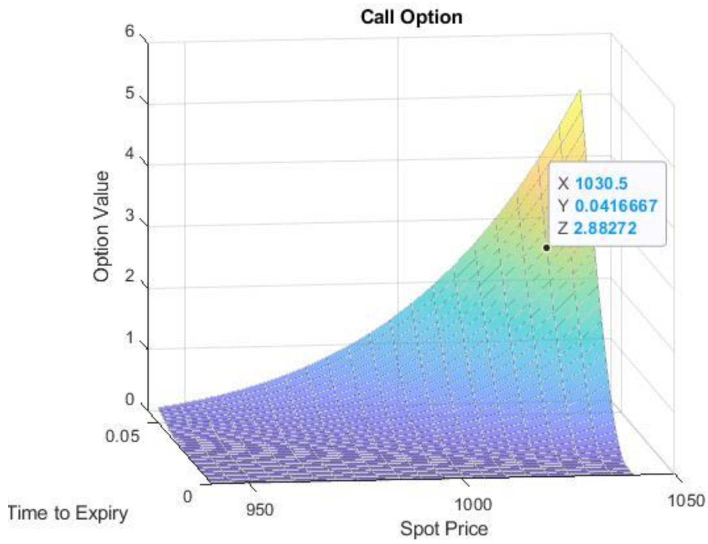
ในรูปที่ 4.1-4.2 แสดงราคายูโรเปียนคอลออปชันที่ได้จากการนำค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากแบบจำลองสโตแคสติก SABR ไปแทนค่าย้อนกลับในแบบจำลองแบล็ค ณ วันที่ 11 มิถุนายน พ.ศ.2564 ที่ค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากการปรับค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 ภายใต้แบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR และ ในรูปที่ 4.3 แสดงราคายูโรเปียนคอลออปชันที่ได้จากราคาดัชนี SET50 ที่ต่างกัน ที่มีค่าความผันผวนเท่ากับ 0.175 ณ วันที่ 11 มิถุนายน พ.ศ.2564

โดยกำหนดให้

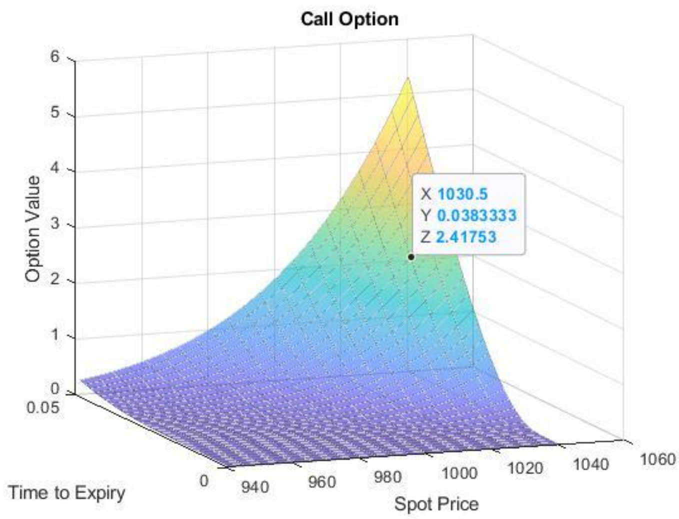
แกน X แสดงระดับราคาของสินทรัพย์อ้างอิง ซึ่งในงานวิจัยนี้ก็คือ ราคาของดัชนี SET50 (จุด)

แกน *Y* แสดง อายุคงเหลือของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A (ปี)

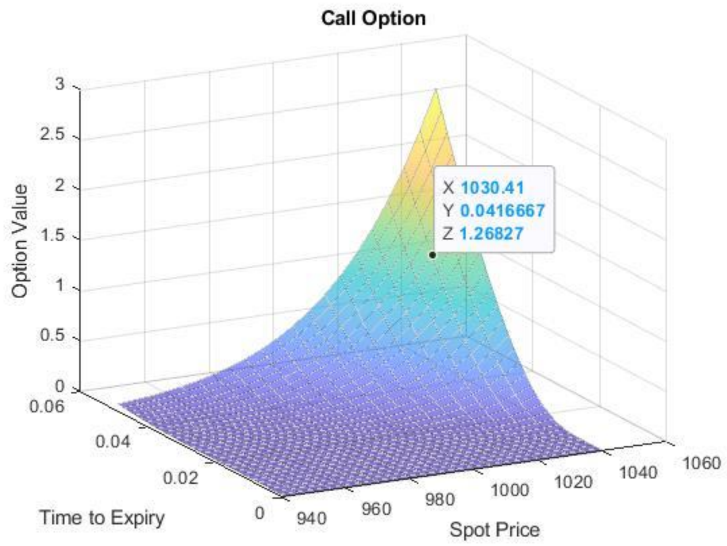
แกน Z แสดง ราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A ที่ได้จากการประมาณจากค่าความผันผวนเชิงนัยทั้ง 3 วิธีดังที่เคยกล่าวมา (จุด)



รูปที่ 4.1 ราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A ณ ระดับราคาดัชนี SET50 ที่ต่างกัน ซึ่งได้มาจากความผันผวนเชิงนัยจากแบบจำลอง SABR ด้วยวิธีที่ 1 ซึ่งมีค่าความผันผวนเชิงนัยเท่ากับ 0.3739 ณ วันที่ 11 มิถุนายน พ.ศ.2564



รูปที่ 4.2 ราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A ณ ระดับราคาดัชนี SET50 ที่ต่างกัน ซึ่งได้มาจากความผันผวนเชิงนัยจากแบบจำลอง SABR ด้วยวิธีที่ 2 ซึ่งมีค่าความผันผวนเชิงนัยเท่ากับ 0.37274 ณ วันที่ 11 มิถุนายน พ.ศ.2564



รูปที่ 4.3 ราคาราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A ณ ระดับราคาดัชนี SET50 ที่ต่างกัน ซึ่งได้มาจากความผันผวนของผลตอบแทนจากดัชนี SET50 ซึ่งมีค่าความผันผวนเท่ากับ 0.175 ณ วันที่ 11 มิถุนายน พ.ศ. 2564

จากรูปที่ 4.1-4.3 จะเห็นได้ว่าราคาราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A จะมีค่ามากขึ้นเมื่อราคาของสินทรัพย์อ้างอิงมีค่าเพิ่มขึ้น และพบว่า ระยะเวลาคงเหลือก่อนถึงวันครบกำหนดอายุ (*T-t*) มีผลต่อราคาของคอลออปชันเช่นเดียวกัน ซึ่งเป็นสิ่งที่สอดคล้องกับคุณสมบัติของคอลออปชันทั้งคู่

เมื่อนำค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากการปรับค่าพารามิเตอร์ภายใต้แบบจำลอง SABR ทั้งสองวิธี และค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากการนำราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A ไปแทนค่าในแบบจำลองของแบล็ค เพื่อหามูลค่าของใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ S5019C2106A ย้อนหลังเปรียบเทียบกับราคาของ ใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ S5019C2106A ย้อนหลังที่เกิดขึ้นจริง ได้ผลค่าความคาดเคลื่อนดังแสดงในตารางที่ 4.2

<u>ตารางที่ 4.2</u> แสดงค่าความคาดเคลื่อนซึ่งใช้เป็นค่า Root Mean Square Error (RMSE) ของการประมาณราคาใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A จากค่าความผัวผวนเชิงนัยทั้ง 3 แบบ ซึ่งได้แก่ ค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากการปรับค่า พารามิเตอร์ด้วยวิธีที่ 1 (SABR1) และ วิธีที่ 2 (SABR2) และ ค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้มาจากการนำราคาย้อนหลังของ ราคาของใบสำคัญแสดงสิทธิอนุพันธ์ S5019C2106A ที่เกิดขึ้นจริงจากตลาด มาแทนค่าย้อนกลับในแบบจำลองของแบล็ค เพื่อหาค่าความผันผวนเชิงนัย โดยไม่มีการปรับค่าพารามิเตอร์ให้ตรงกับสภาวะจริงของตลาด (BSM)

Method	SABR1	SABR2	BSM
RMSE	0.3631	0.3590	0.3917

ที่มา : จากการคำนวณ

จากตารางที่ 4.2 จะเห็นได้ว่าการประเมินราคาใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ S5019C2106A โดยการใช้ค่าความผันผวนเชิงนัยจากแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR ด้วยการปรับค่าพารามิเตอร์วิธีที่ 2 (SABR2)จะทำให้การประมาณราคาใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ S5019C2106A มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

5. บทสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 บทสรุป

การศึกษานี้ได้ทำการหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองสโตแคสติก SABR Model ด้วยการปรับค่าพารามิเตอร์ให้เข้ากับข้อมูลจริงในตลาด 2 วิธี ซึ่งวิธีที่ 1 เป็นการปรับค่าพารามิเตอร์ α, ρ, ν โดยตรง และวิธีที่ 2 เป็นการปรับค่าพารามิเตอร์ ρ และ ν โดยการใช้ค่าพารามิเตอร์ α เชิงนัย (Implying Alpha) ที่ได้มาจากค่าความผันผวนเชิงนัย ณ ช่วง At-the-money โดยกำหนดให้ค่า $\beta = 0.5$ ทั้งสองวิธี

พบว่าการปรับค่าพารามิเตอร์จากวิธีที่ 2 ซึ่งจะได้ค่าพารามิเตอร์ α เชิงนัย (Implying Alpha) จากการคำนวณด้วยโปรแกรม Matlab เป็น $\alpha_{imp} = 12.081$ และได้ค่าพารามิเตอร์จากการปรับค่าเป็น $\rho = -3.99e-09$, $\nu = 0.5$ ส่งผลทำให้ได้ค่าความผันผวนเชิงนัยภายใต้แบบจำลอง SABR Model เป็น $\sigma_{SABR2} = 0.37274$ ซึ่งเป็นค่าความผันผวนเชิงนัยที่ทำให้ได้ค่าประมาณของราคาใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ S5019C2106A มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ซึ่งมีค่า $\text{RMSE} = 0.3590$

ตามมาด้วยการปรับค่าพารามิเตอร์จากวิธีที่ 1 จากการคำนวณด้วยโปรแกรม Matlab จะได้ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการปรับค่าให้ตรงกับสภาวการณ์จริงที่เกิดขึ้นในตลาดเป็น $\alpha = 12.062$, $\rho = 0.0347$, $\nu = 0.748$ ส่งผลทำให้ได้ค่าความผันผวนเชิงนัยภายใต้แบบจำลอง SABR เป็น $\sigma_{SABR1} = 0.3739$ เป็นค่าความผันผวนเชิงนัยที่ทำให้ได้ค่าประมาณของราคาใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ S5019C2106A มีค่าคลาดเคลื่อนเท่ากับ $\text{RMSE} = 0.3631$

และการแทนค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้จากการนำราคาย้อนหลังที่เกิดขึ้นจริงของใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ S5019C2106A มาแทนค่าย้อนกลับในแบบจำลองของแบล็ค ซึ่งจะได้ $\sigma_B = 0.175$ ซึ่งหลังจากการนำค่าความผันผวนเชิงนัยที่ได้นี้ไปหาราคาประมาณของ ใบสำคัญแสดงสิทธิ์อนุพันธ์ S5019C2106A จะเกิดค่าคาดเคลื่อนคือ $\text{RMSE} = 0.3917$ ซึ่งถือเป็นค่าคาดเคลื่อนที่มากที่สุด

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในการศึกษาครั้งนี้ยังมีอีกหลายสิ่งที่น่าสนใจในการนำไปศึกษาต่อยอด เพื่อพัฒนาองค์ความรู้ทางด้านวิศวกรรมการเงิน และพัฒนาตลาดตราสารอนุพันธ์ของประเทศไทยให้มีความน่าสนใจมากขึ้น เช่น การนำแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติก SABR ไปใช้เพื่อประเมินมูลค่าของตราสารที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ยกตัวอย่างเช่น ตราสารจำพวก Swaption และตราสารที่เป็น Exotic option ต่างๆ ซึ่งสามารถนำไปสู่การป้องกันความเสี่ยงของนักลงทุนที่มากยิ่งขึ้นต่อไป

เอกสารอ้างอิง

วรฎี คงทอง. (2558). *ระเบียบวิธีผลต่างอันตะของการประเมินราคาออปชันด้วยแบบจำลองความผันผวนสโตแคสติกเฮสตัน (Finite Difference Method for the Heston Stochastic Volatility Model)* (การศึกษาอิสระปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย).

Dupire, B. (1993). *Pricing and hedging with smile.* Paris: Proceedings of AFFI Conferences. June 1992.

Geeske Vlaming. (2008). *Pricing options with the SABR Model*. United States of America (USA).

Hagan, P.S. Kumar, D and Lesniewski, A. Woodward, D.E. (2002). *Managing smile risk*. Wilmott Magazine. 84-108.